3 TÜREVLER

3.1 Bir Fonksiyonun Türevi
3.2 Bir Fonksiyon Olarak Türev

Birinci bölümün sonunda, bir $y=f(x)$ eğrisinin $x=x_0$ noktasında eğimini $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ olarak tanımladık. Bu limite, varsa, x_0'da f'nin türevi diyeceğiz.

Tanım: x değişkenine göre $f(x)$ fonksiyonunun türevi, x'deki değeri

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

olan f' fonksiyonudur.

f''nün tanım kümesi, f'nin tanım kümesindeki limitin var olduğu noktaların kümesidir. Dolayısıyla, f''nün tanım kümesi, f'nin tanım kümesiyle aynı veya daha küçük olabilir. x noktasında f' varsa, x noktasında f diferansiyellenebilir denir. f'nin tanım kümesindeki her x için f' varsa, f'ye diferansiyellenebilir denir.

Eğer $z=x+h$ dersek, $h=z-x$ ve $h\to 0$ iken $z\to x$ dir. Buna göre türevin tanımını

$$\boxed{f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}}$$

olarakta verebiliriz.

Birinci bölümün sonunda $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun türevinin $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ olduğunu gördük. Şimdi tanımdan, bir iki fonksiyonun daha türevini görelim.

Örnek1: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ fonksiyonunun $(x\neq 1)$ türevini bulunuz.

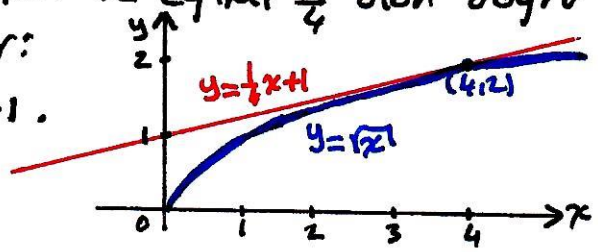
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\,\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=-\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Örnek 2: a) $x>0$ için $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.
b) $x=4$'de $y=\sqrt{x}$ eğrisinin teğet doğrusunu yazınız.

a) $$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}\cdot\frac{\sqrt{z}+\sqrt{x}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$$
$$=\lim_{z\to x}\frac{\cancel{z-x}}{\cancel{(z-x)}(\sqrt{z}+\sqrt{x})}=\lim_{z\to x}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

b) $x=4$'de eğrinin eğimi $m=f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$ dür. $x=4$'de $f(4)=2$, buna göre $(4,2)$ noktasından geçen ve eğimi $\frac{1}{4}$ olan doğru eğrinin $x=4$'deki teğet doğrusudur:
$$y-2=\frac{1}{4}(x-4)\implies y=\frac{x}{4}+1.$$



Notasyonlar:

$y=f(x)$ fonksiyonunun türevini göstermek için birçok notasyon vardır. Bazı yaygın notasyonlar
$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=D(f)(x)=D_x f(x)$$
(y', Newton notasyonu , $\frac{dy}{dx}$, Leibniz notasyonu).

$x=a$'da türevin değerini
$$f'(a)=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a}=\frac{df}{dx}\Big|_{x=a}=\frac{d}{dx}f(x)\Big|_{x=a}$$
notasyonları ile gösteririz.

3.3
Sabitlerin, Kuvvetlerin, Çarpımların ve Toplamların Türevleri

Kural 1: $f(x)=c$ sabit fonksiyon ise $\frac{df}{dx}=0$ dır.

Kanıt: $$f'(x)=\frac{df}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

Örnek: a) $\frac{d}{dx}3=0$ b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ c) $\frac{d}{dx}(\sqrt{3})=0.$

Kural 2: n pozitif tamsayı ise $\frac{d}{dx}x^n=n\,x^{n-1}$ dir.

Kanıt: $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\quad\left[a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})\right]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[(x+h)-x][(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\dots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}\right] = n x^{n-1}$$

Örnek: a) $\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ b) $\frac{d}{dx}x = 1$.

Kural 3: u, x'in diferansiyellenebilir fonksiyonu ve c bir sabit ise

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx} \qquad (cu)' = cu'.$$

dir.

Örnek: a) $\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}x^4 = 3.4x^3 = 12x^3$. b) $\frac{d}{dx}(-x) = -\frac{d}{dx}x = -1$.

Kural 4: u ve v, x'in dif. fonksiyonları ise $u+v$'de diferansiyellenebilirdir ve

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \text{ dir.}$$

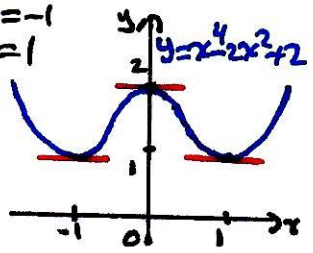
Kural 3'ü kullanarak $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u+(-1)v) = \frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}(-1)v = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$ dir.

Örnek: a) $\frac{d}{dx}\left(x^4 - \frac{4}{3}x^2 + 2x + 7\right) = \frac{d}{dx}x^4 - \frac{4}{3}\frac{d}{dx}x^2 + 2\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}7$

$$= 4x^3 - \frac{8}{3}x + 2$$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$ eğrisinin yatay teğetleri var mıdır? Varsa hangi noktalardadır.

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x \qquad \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 4x(x^2-1) = 0 \quad x=0,\ x=-1,\ x=1$$



-1, 0 ve 1 noktalarında yatay teğetler vardır.

Tek Taraflı Türevler

Bir $y=f(x)$ fonksiyonu, bir açık aralık (sonlu veya sonsuz) üzerindeki her noktada türeve sahipse, aralıkta diferansiyellenebilir denir. $[a,b]$ kapalı aralığında diferansiyellenebilmek demek, (a,b) açık aralığında dif ve uç noktalarda

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad x=a\text{'da sağ taraflı türev}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h} \quad x=b\text{'de sol taraflı türev}$$

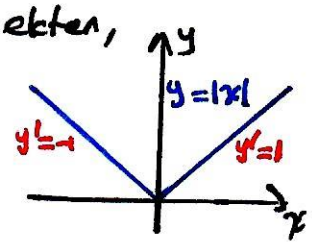
olmasıdır. Sağ ve sol taraflı türevler, herhangi bir iç noktada da tanımlanabilir. Buna göre $f'(x)$ var $\Leftrightarrow$ sağ ve sol taraflı türevler var ve eşit

Örnek 1: $y=|x|$ orjinde diferansiyellenebilir değildir.

$y=|x|$, $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ aralığında dif. dir. Gerçekten,

$x>0$ için $\frac{d}{dx}(|x|)=\frac{d}{dx}x=1$,

$x<0$ için $\frac{d}{dx}(|x|)=\frac{d}{dx}(-x)=-1$ dir.



$x=0$'da sağ ve sol türevlere bakalım!

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1 \quad \text{(sağ taraflı türev)}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1 \quad \text{(sol taraflı türev)}$$

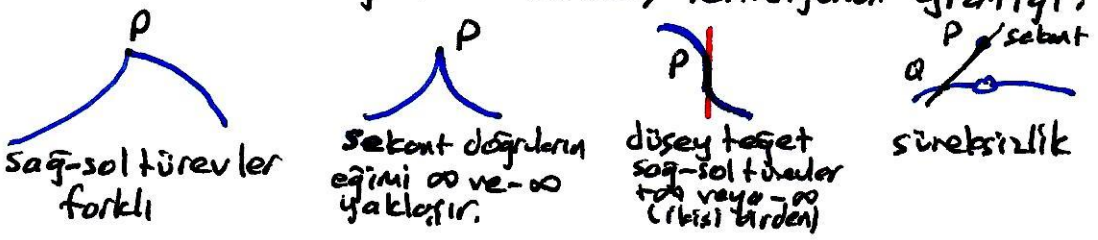
Sağdan ve soldan türevler eşit olmadığından $x=0$'da türev yoktur.

Örnek 2: $y=\sqrt{x}$ fonksiyonunun $x=0$'da türevini araştıralım.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{0+h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=\infty.$$

Limit sonlu olmadığından, $x=0$'da türev yoktur. $y=\sqrt{x}$ grafiği, orjinde dikey (düşey) teğete sahiptir.

Türevin olmadığı noktalarda, fonksiyonun grafiği:



Teorem: f fonksiyonu $x=c$'de türevlenebilirse, f fonksiyonu $x=c$'de süreklidir.

Kanıt: $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$ olduğunu göstermemiz gerekir. Bu, $\lim_{h\to 0}f(c+h)=f(c)$ denktir.

$$\lim_{h\to 0}f(c+h)=\lim_{h\to 0}\left([f(c+h)-f(c)]+f(c)\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(c+h)-f(c)}{h}h+f(c)\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\lim_{h\to 0}h+\lim_{h\to 0}f(c)=f'(c)\cdot 0+f(c)=f(c)$$

■

Örnek 1, sürekli fakat türevi olmayan fonksiyona örnektir.

İkinci ve Daha Yüksek Dereceden Türevler

$y' = \frac{dy}{dx}$ türevi, y'nin x'e göre birinci (birinci dereceden) türevidir. Bu türevin, x'e göre türevi varsa

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

y'nin x'e göre ikinci (ikinci dereceden) türevi denir. y'' 'de diferansiyellenebilir ise

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$$

üçüncü (üçüncü dereceden) türevi denir. Varsa n. (n. dereceden) türev

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx} y^{(n-1)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

ile gösterilir.

Örnek: $y = x^4 + 3x^3 - x + 27$ 'nin n. türevini bulunuz.

$y' = 4x^3 + 9x^2 - 1$

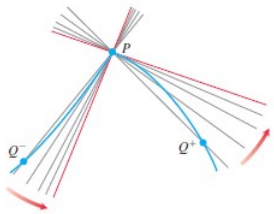
$y'' = 12x^2 + 18x$

$y''' = 24x + 18$

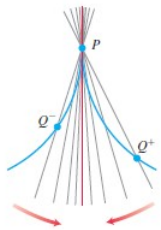
$y^{IV} = 24$

$y^{V} = y^{(5)} = 0$

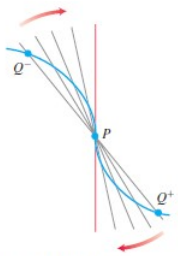
$y^{(n)} = 0 \quad n \geq 5.$



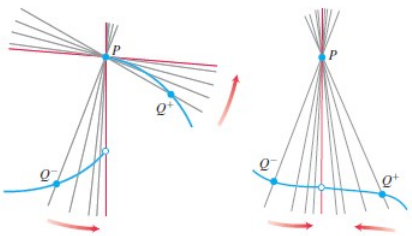
1. a *corner*, where the one-sided derivatives differ.



2. a *cusp*, where the slope of *PQ* approaches ∞ from one side and −∞ from the other.



3. a *vertical tangent*, where the slope of *PQ* approaches ∞ from both sides or approaches −∞ from both sides (here, −∞).



4. a *discontinuity* (two examples shown).

3.3 Çarpım, Bölüm ve Negatif Kuvvetlerin Türevleri (devam)

$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ olduğunu görmüştük. $\frac{d}{dx}(u.v) = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{dx}$ mi dir?

$\frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$, $\frac{d}{dx}x.\frac{d}{dx}x = 1.1 = 1$ örnekte görüldüğü gibi cevap olumsuzdur.

Kural 5: u ve v, x'in diferansiyellenebilir fonksiyonları ise $u.v$'de dif. dir ve

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \qquad (uv)' = uv' + vu'$$

dir.

Kanıt:

$$\frac{d}{dx}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}u(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$= u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}.$$

Örnek: $y = (x^3-1)(x^2+4)$'ün türevini bulunuz.

Çarpım kuralı ile: $u = x^3-1$ $v = x^2+4$ $\frac{d}{dx}(x^3-1)(x^2+4) = (x^3-1)(2x) + (x^2+4)(3x^2)$

$= 2x^4 - 2x + 3x^4 + 12x^2 = 5x^4 + 12x^2 - 2x.$

Doğrudan: $y = (x^3-1)(x^2+4) = x^5 + 4x^3 - x^2 - 4$ $\frac{d}{dx}y = 5x^4 + 12x^2 - 2x.$

Kural 6: u ve v, x'in dif. fonksiyonları ve $v(x) \neq 0$ ise $\frac{u}{v}$'de x'in dif. fonksiyonudur ve

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

dir.

Örnek: $y = \frac{t^2-3}{t^4+1}$'in türevini bulunuz.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(t^4+1)(2t) - (t^2-3)(4t^3)}{(t^4+1)^2} = \frac{-2t^5 + 12t^3 + 2t}{(t^4+1)^2}.$$

Kural 7: n negatif tamsayı ve $x \neq 0$ ise $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ dir.

Kanıt: n negatif tamsayı ise $m = -n$ pozitif bir tamsayıdır. $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ dir.

$$\frac{d}{dx} x^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m \frac{d}{dx} 1 - 1 \cdot \frac{d}{dx} x^m}{(x^m)^2} = \frac{0 - m x^{m-1}}{x^{2m}} = -m x^{-m-1}$$

$$= n x^{n-1}.$$

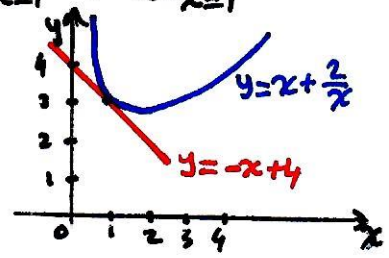
Örnek: a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx} x^{-1} = -\frac{1}{x^2}$. b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^7}\right) = -21 x^{-8} = -\frac{21}{x^8}$.

c) $y = x + \frac{2}{x}$ eğrisinin $(1,3)$ noktasında teğet denklemini yazınız.

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{2}{x}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$ $x=1$'de eğim $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left.\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)\right|_{x=1} = -1$.

$(1,3)$'deki teğet denklemi:

$y - 3 = (-1)(x-1) \Rightarrow y = -x + 4$ dür.



3.5 Trigonometrik Fonksiyonların Türevleri

$y=f(x)=\sin x$ fonksiyonunun türevini bulmak için yorum açı veya $\sin(x+h)=\sin x\cos h+\cos x\sin h$ eşitliğini kullanıyoruz.

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\sin x\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\right]=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$$

$$=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1=\cos x.$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\sin x=\cos x}$$

Örnek: a) $\frac{d}{dx}(3x^4-2\sin x)=12x^3-2\cos x$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

$$\frac{d}{dx}\cos x=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h-\sin x\sin h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\cos x\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right]$$

$$=\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1$$

$$=-\sin x$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x}$$

Örnek: a) $y=\sin x\cos x$, $y'=?$

$$\frac{dy}{dx}=\sin x\frac{d}{dx}(\cos x)+\cos x\frac{d}{dx}(\sin x)$$
$$=\sin x(-\sin x)+\cos x\cdot\cos x$$
$$=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos(2x)$$

($y=\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$, $\sin(2x)$'in türevini daha bilmiyoruz).

b) $y=\frac{\cos x}{1-\sin x}$, $y'=?$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1-\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x)-\cos x\frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$=\frac{(1-\sin x)(-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$$

$$=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x = -\csc^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{0 + \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{0 - \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x, & \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x, & \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x \end{array}}$$

Örnek: $y = \sec x$ ise $y'' = ?$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'' = (\sec x \tan x)\tan x + \sec^2 x . \sec x$$

$$= \sec x \tan^2 x + \sec^3 x .$$

3.6 Zincir Kuralı

Bu bölümde bileşke fonksiyonların türevlerinin nasıl alınacağını göstereceğiz. Buna, zincir kuralı diyoruz. Önce, örnekler le başlayalım.

Örnek 1: $y = 8x - 12 = 4(2x-3)$ fonksiyonunu, $y = 4u$ ve $u = 2x-3$ fonksiyonlarının bileşke fonksiyonu olarak düşünebiliriz.

$\frac{dy}{dx} = 8$, $\frac{dy}{du} = 4$ ve $\frac{du}{dx} = 2$ dir. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{dy}{dx} = 4 \cdot 2 = 8$. Gerçekten $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ eşitliği her zaman sağlanır mı? Bir örnek daha yapalım.

Örnek 2: $y = 4x^4 - 12x^2 + 9 = (2x^2-3)^2$ fonksiyonu da $y = u^2$ ile $u = 2x^2-3$ fonksiyonlarının bileşkesidir.

$\frac{dy}{du} = 2u = 2(2x^2-3) = 4x^2-6$, $\frac{du}{dx} = 4x$, $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (4x^2-6)4x = 16x^3 - 24x$

$\frac{dy}{dx} = 16x^3 - 24x$, tekrardan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ elde ettik.

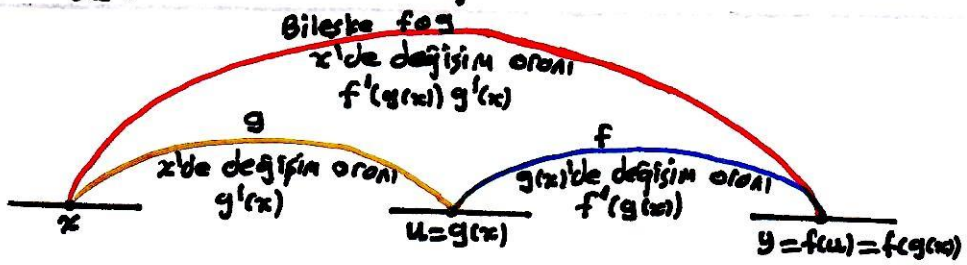
Teorem: Zincir kuralı: $f(u)$, $u = g(x)$ noktasında diferansiyellenebilir ve $g(x)$, x'de dif. ise bileşke fonksiyon $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, x'de dif. ve

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

dir. Leibniz notasyonu ile, $y = f(u)$ ve $u = g(x)$ ise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

dir. Burada $\frac{dy}{du}$, $u = g(x)$'deki değeridir.



Örnek 1: $y = \cos(x^3 + 3x^2)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

$y = \cos u$, $u = x^3 + 3x^2$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-\sin u)(3x^2+6x) = -(3x^2+6x)\sin(x^3+3x^2)$

veya $\frac{d}{dx}\cos(x^3+3x^2) = -\sin(x^3+3x^2) \cdot \underbrace{(3x^2+6x)}_{\text{içinin türevi}} = -(3x^2+6x)\sin(x^3+3x^2)$.

Örnek 2: $f(t) = \tan(\sin(2t) - t^3)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.
Burada, zincir kuralını birden fazla kullanıyoruz.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}\left(\tan(\sin(2t) - t^3)\right) \\ &= \sec^2[\sin(2t) - t^3] \cdot \frac{d}{dt}(\sin(2t) - t^3) \\ &= \sec^2[\sin(2t) - t^3] \cdot \left[\cos(2t)\frac{d}{dt}(2t) - 3t^2\right] \\ &= \sec^2[\sin(2t) - t^3] \cdot [\cos(2t) \cdot 2 - 3t^2] \\ &= (2\cos(2t) - 3t^2)\sec^2(\sin(2t) - t^3). \end{aligned}$$

Bir Fonksiyonun Üslerini İçeren Zincir Kuralı

u, x'e bağlı bir fonksiyon ve $f(u) = u^n$ ise zincir kuralından

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} = n u^{n-1}\frac{du}{dx}$$

dir.

Örnek 1: a) $\frac{d}{dx}(7x^4 - x^3)^9 = 9(7x^4 - x^3)^8 \frac{d}{dx}(7x^4 - x^3) = 9(7x^4 - x^3)(28x^3 - 3x^2)$.

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{d}{dx}(3x-2)^{-1} = (-1)(3x-2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x-2) = -\frac{3}{(3x-2)^2}$.

Örnek 2: $y = \sin^5 x$ eğrisinin $x = \frac{\pi}{3}$'de eğimini bulunuz.

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi/3} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}.$$

Örnek 3: $y = |x|$ fonksiyonunun $x = 0$ dışında diferansiyellenebilir olduğunu daha önce görmüştük: $|x| = \sqrt{x^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(|x|) &= \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x^2}}\frac{d}{dx}(x^2) \qquad \left[u = x^2,\ n = \tfrac{1}{2},\ x \neq 0\right] \\ &= \frac{1}{2|x|} \cdot 2x \\ &= \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

3.7 Kapalı Türetme

Şimdiye kadar, ilgilendiğimiz fonksiyonların büyük çoğunluğu, y'yi x'in açık fonksiyonu olarak ifade eden, $y=f(x)$ formundaki fonksiyonlardı. Bu fonksiyonların türevlerini inceledik. Daha sonra, $x=x(t)$, $y=y(t)$ denklemleri ile verilen parametrik eğrilerin, türevlerini öğrendik. Üçüncü durum,

$$x^2+y^2-4=0\ ,\quad y^2-x=0\ ,\quad x^3+y^3-9xy=0$$

şeklindeki denklemlerle oluşan durumdur. Bu denklemler, x ve y değişkenleri arasında kapalı bir bağıntı tanımlar. Bazı durumlarda böyle denklemler x'in açık fonksiyonu (veya birkaç fonksiyon) çözülebilir. $F(x,y)=0$ denklemini, $y=f(x)$ şeklinde yazamazsak bile $\frac{dy}{dx}$ türevini kapalı türetme ile bulabiliriz. Aşağıdaki örneklerle (basitten zora doğru) kapalı türetmeyi açıklayalım.

Örnek 1: $y^2=x$ ise $\frac{dy}{dx}$'i bulunuz.

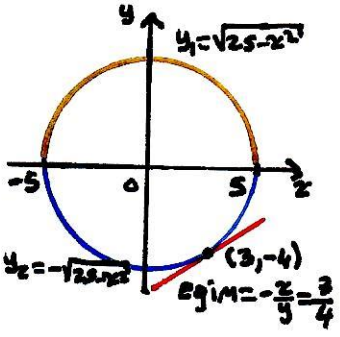
$y^2=x$, iki tane diferansiyellenebilir, $y_1=\sqrt{x}$ ve $y_2=-\sqrt{x}$, fonksiyonlarını tanımlar. $\frac{dy_1}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ve $\frac{dy_2}{dx}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$ dir. Eğer bu fonksiyonları bilmiyorsak yine de türevlerini bulabilirmiyiz. Cevabımız evettir. $y^2=x$ eşitliğinin her iki tarafının x'e göre türevini alıyoruz. y^2'de zincir kuralını uygulıyoruz. Yani $\frac{dy^2}{dx}=2y\frac{dy}{dx}=2y.y'$ dür.

$$y^2=x \Rightarrow \frac{dy^2}{dx}=\frac{d}{dx}x \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y} \text{ dir.}$$

Eğer, açık fonksiyonları biliyorsak, $\frac{dy_1}{dx}=\frac{1}{2y_1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $\frac{dy_2}{dx}=\frac{1}{2y_2}=\frac{1}{2(-\sqrt{x})}$ dır.

Örnek 2: $x^2+y^2=25$ çemberinin, $(3,-4)$ noktasında eğimini bulunuz.

$x^2+y^2=25$ çemberi x'in iki dif. fonksiyonu olarak yazılır: $y_1=\sqrt{25-x^2}$ ve $y_2=-\sqrt{25-x^2}$. $(3,-4)$ noktası y_2'nin grafiği üzerinde olduğundan $\frac{dy_2}{dx}=-\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$ dir. $(3,-4)$ noktasında eğrinin eğimi $m=\frac{dy_2}{dx}\Big|_{x=3}=\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\Big|_{x=3}=\frac{3}{4}$ dür.



x'e göre türevini kapalı olarak kolayca bulabiliriz:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)=\frac{d}{dx}25 \Rightarrow 2x+2y.y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{x}{y} \text{ dir.}$$

$(3,-4)$ noktasında eğim $=y'\big|_{(3,-4)}=-\frac{x}{y}\Big|_{(3,-4)}=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$ dür.

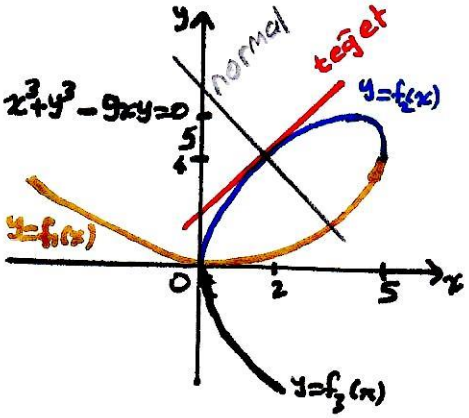
Örnek 3: $y^2=x^2+\sin(xy)$ ise $\frac{dy}{dx}$'i bulunuz.

$$\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}(x^2+\sin(xy)) \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=2x+\cos(xy)\left[y+x\frac{dy}{dx}\right] \Rightarrow$$

$$[2y-x\cos(xy)]\frac{dy}{dx}=2x+y\cos(xy) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x+y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}.$$

Örnek 4: $(2,4)$ noktasının $x^3+y^3-9xy=0$ eğrisi üzerinde olduğunu gösteriniz. Bu noktada, eğrinin teğet ve normalini bulunuz.

$2^3+4^3-9.2.4=0$ sağlandığından $(2,4)$ eğri üzerindedir.



$$\frac{d}{dx}(x^3+y^3-9xy)=\frac{d}{dx}0 \Rightarrow$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-9\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0 \Rightarrow$$

$$[3y^2-9x]\frac{dy}{dx}=9y-3x^2 \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y-x^2}{y^2-3x}.$$ $(2,4)$ noktasında eğim:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)}=\left.\frac{3y-x^2}{y^2-3x}\right|_{(2,4)}=\frac{3.4-2^2}{4^2-3.2}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}.$$

Teğet doğrusu: $y-4=\frac{4}{5}(x-2) \Rightarrow y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}.$

Normal doğrusu: $y-4=-\frac{5}{4}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{5}{4}x+\frac{13}{2}.$

(Çok karışık olsada, üçüncü dereceden denklemlerin kökleri bulunabilir. Buna göre üç açık fonksiyon $y=\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}+\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}=f(x)$, $y=\frac{1}{2}\left[-f(x)\pm\sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}+\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}-\sqrt[3]{-\frac{x^3}{2}-\sqrt{\frac{x^6}{4}-27x^3}}\right)\right]$ şeklindedir.)

Yüksek Mertebeden Türevler

Yüksek mertebeden türevleri bulmak için de kapalı türetmeyi kullanabiliriz. Aşağıda örneği:

Örnek: $2x^3-3y^2=8$ ise $\frac{d^2y}{dx^2}$'yi bulunuz.

$$\frac{d}{dx}(2x^3-3y^2)=\frac{d}{dx}8 \Rightarrow 6x^2-6y.y'=0 \Rightarrow y'=\frac{x^2}{y},\ y\neq 0.$$

$$\frac{d}{dx}(6x^2-6y.y')=\frac{d}{dx}0 \Rightarrow 12x-6[(y')^2+y.y'']=0 \Rightarrow y.y''=2x-(y')^2$$

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2x-(y')^2}{y}=\frac{2x-\left(\frac{x^2}{y}\right)^2}{y}=\frac{2xy^2-x^4}{y^3},\ y\neq 0$$

(veya $y''=\frac{d}{dx}y'=\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2xy^2-x^4}{y^3}, y\neq 0$).

Diferansiyellenebilir Fonksiyonların Rasyonel Kuvvetleri

$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ kuralının, n tamsayı olduğu zaman doğru olduğunu göstermiştik. Kapalı türetmeyi kullanarak, n rasyonel sayı olsa da kuralın geçerli olduğunu göstereceğiz.

Teorem: p/q bir rasyonel sayı ise $x^{p/q}$, $x^{p/q-1}$'in tanım kümesindeki her iç noktada diferansiyellenebilirdir ve $\frac{d}{dx}x^{p/q} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}$ dir.

Kanıt: $q>0$ olmak üzere, p ve q tamsayılar ve $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ olsun. Buna göre

$$y^q = x^p$$

dir. p ve q tamsayı olduğundan kuvvet kuralı geçerlidir. Dolayısıyla,

$$\frac{d}{dx}y^q = \frac{d}{dx}x^p \Rightarrow q\,y^{q-1}\frac{dy}{dx} = p\,x^{p-1} \quad y \neq 0 \text{ ise}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}}$$

$$= \frac{p}{q}x^{p-1-(p-p/q)} = \frac{p}{q}x^{p/q-1} \qquad \blacksquare$$

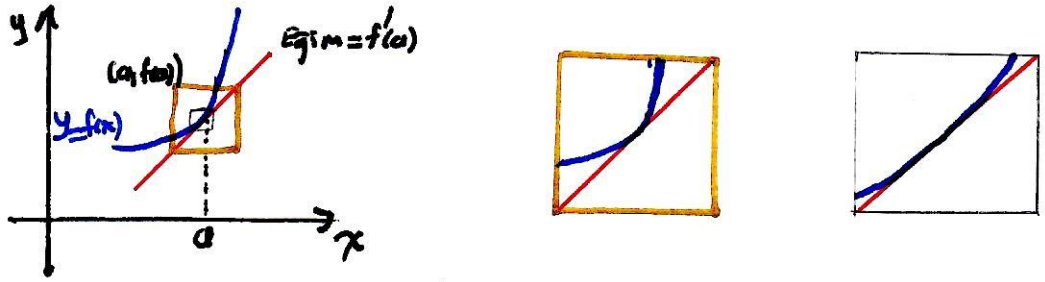
Örnek: a) $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^1}) = \frac{d}{dx}(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

b) $\frac{d}{dx}(x^{-5/4}) = -\frac{5}{4}x^{-\frac{9}{4}}$, $x \neq 0$.

c) $\frac{d}{dx}(\sin x)^{2/3} = \frac{2}{3}(\sin x)^{-1/3}\frac{d}{dx}(\sin x) = -\frac{2}{3}\cos x\,(\sin x)^{-1/3}$ $(\sin x \neq 0)$.

Doğrusallaştırma ve Diferansiyel

Karışık fonksiyonların değerlerini hesaplarken, daha basit fonksiyonlar ile çalışarak yaklaşık değerlerini bulabiliriz. Bu bölümde, yaklaşık değer bulmada, doğrusallaştırma (linerizasyon) (lineerleştirme), teğet doğrular yardımıyla çalışılacaktır.



Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, a'nın çok yakınındaki x noktalarının değerini hesaplarken, karmaşık fonksiyon yerine teğet doğrusunu alabiliriz. a'nın civarına çok yaklaşırsak fonksiyon (mavi) ile teğet doğrusunun (kırmızı) çakıştığını görebiliriz.

$x=a$ noktasında, $y=f(x)$ dif. fonksiyonun teğet doğrusu $(a, f(a))$'dan geçen ve eğimi $f'(a)$ olan doğrudur:

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Bu teğet doğru, doğrusal (lineer) fonksiyonun grafiğidir:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Tanım: $x=a$'da f diferansiyellenebilir ise $x=a$'da f'nin doğrusallaştırması

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

yaklaşım fonksiyonudur. L tarafından f'nin $f(x) \approx L(x)$ yaklaşımı a'da f'nin standard doğrusal yaklaşımıdır. $x=a$'ya yaklaşımın merkezi denir.

Örnek: $x=0$'da $f(x)=\sqrt{1+x}$ fonksiyonunun doğrusallaştırmasını bulunuz.

$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$, $\quad f(0)=1$ ve $f'(0)=\frac{1}{2}$

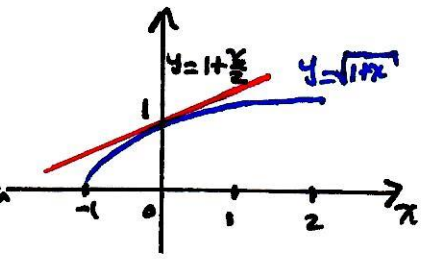
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \tfrac{1}{2}(x-0) = 1 + \tfrac{x}{2} \text{ dir.}$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}.$$

Örneğin, $\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$

$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.0025$

Gerçek değer	G.D.–Yaklaş.
1.024695	$< 10^{-3}$
1.002497	$< 10^{-5}$



Tanım: $y=f(x)$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. dx diferansiyeli bir bağımsız değişkendir. dy diferansiyeli

$$dy=f'(x)dx$$

olarak tanımlanır.

dx bağımsız değişkenin aksine, dy diferansiyeli x ve dx'e bağlıdır. $y=f(x)$ fonksiyonunun x'e göre türevini Leibniz notasyonu ile $\frac{dy}{dx}=\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}y$ olarak göstermiştir. Şimdi $\frac{dy}{dx}$'i bir oran olarak düşünebiliriz. Oran olarak düşündüğümüzde, dy ve dx diferansiyellerdir. Gerçekten,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f'(x)dx}{dx}=f'(x).$$

Örnek: a) $y=x^5+23x$ ise $dy=(5x^4+23)dx$ dir.

b) $d(\sin x)=\cos x\, dx$.

Diferansiyelin Geometrik Anlamı

$x=a$ ve $dx=\Delta x$ alalım.

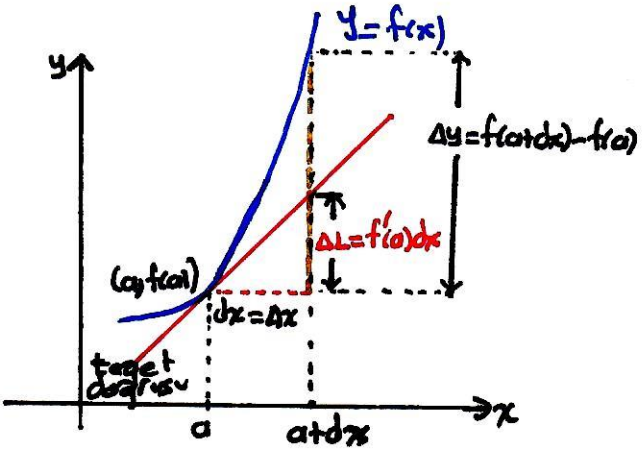
$$\Delta y=f(a+dx)-f(a) \quad \text{dır.}$$

$$\Delta L=L(a+dx)-L(a)$$

$$=\underbrace{f(a)+f'(a)[(a+dx)-a]}_{L(a+dx)}-\underbrace{f(a)}_{L(a)}$$

$$=f'(a)dx.$$

$$\Delta L=dy$$



$$d(u+v)=du+dv$$

$$d(uv)=v\,du+u\,dv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}$$